مدينة الملك عبد العزيز للعلوم و التقنية
المركز الوطني للعلوم الرياضية
المسابقة الرابعة في الرياضيات لطلاب و طالبات المرحلة الثانوية
مع إجابات مختصرة

الزمن : ثلاث ساعات

أجب عن الأسئلة التالية:

السؤال الأول:

(أ) أوجد مجموعة حلّ المعادلة $\sqrt{\text{س}^2 - \sqrt{2\text{س}+1}} = 2 - \text{س}$ [7 درجات]

(ب) أوجد جميع أصفار كثيرة الحدود $\text{د(س)} = \text{س}^4 - 3\text{س}^3 + 6\text{س}^2 + 2\text{س} - 60$ [7 درجات]

(ج) إذا كانت (**س**,*) زمرة و كان $(\text{س}*\text{ص})^2 = \text{س}^2 * \text{ص}^2$ لكلّ س , ص ينتميان إلى **س** فأثبت أنّ (**س**,*) إبدالية. [لاحظ أن $\text{س}^2 = \text{س}*\text{س}$] [6 درجات]

السؤال الثاني:

(أ) استخدم الاستقراء الرياضي لإثبات أنّ :
$(1-\text{س})(1+\text{س})(1+\text{س}^2)(1+\text{س}^4)\ldots(1+\text{س}^{2^{\text{ن}}}) = 1 - \text{س}^{2^{\text{ن}+1}}$ لكل ن عدد صحيح غير سالب. [10 درجات]

(ب) يلعب فريق كرة قدم خلال أيّام شهر شوال (30 يوماً) 45 مباراة على الأكثر بشرط أن يلعب مباراة واحدة على الأقلّ يومياً. أثبت وجود فترة من الأيّام المتتالية خلال هذا الشهر بحيث يكون مجموع عدد المباريات التي يلعبها الفريق في هذه الفترة هو 14 مباراة بالضبط. [10 درجات]

السؤال الثالث:

(أ) أوجد قيمة النهاية $\lim_{\text{س} \to 1} \frac{\sqrt[3]{\text{س}} - 1}{\sqrt{\text{س}} - 1}$ [8 درجات]

(ب) حلّ المعادلة $\text{لو}(\text{س}-1) = \text{لو}(\text{س}-2) - \text{لو}(\text{س}+2)$ حيث س عدد حقيقي.

[7 درجات]

(ج) إذا كان ك عدداً أوّلياً فهل من الضروري أن يكون $2^{ك}-1$ عدداً أوّلياً ؟ برّر إجابتك. [5 درجات]

السؤال الرابع:

(أ) حلّ المعادلة : $2^{1994} + 4^{997} + 8^{665} = 16^{س}$ [8 درجات]

(ب) أثبت أنّ الدالّة د(س) = لو(س + $\sqrt{س^2+1}$) فرديّة . [نقول أن الدالة فردية إذا حققت الشرط د(- س)= - د(س) لجميع قيم س في مجال د]. [7 درجات]

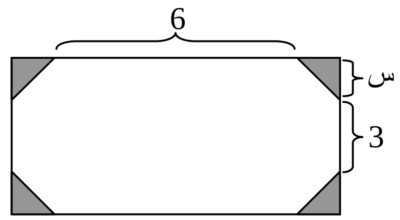
(ج) أوجد قيمة س التي تجعل المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 6س & 4 \\ 9 & 2س \end{bmatrix}$$

غير قابلة للعكس (أي ليس لها نظير ضربي). [5 درجات]

السؤال الخامس :

(أ) إذا علمت أنّ المساحة غير المظللة في المستطيل أدناه تساوي 62 سم^2 فاحسب المساحة المظللة. [12 درجة]



(ب) إذا كان كلّ من ك و م عدداً أوّلياً و كان ك م=2047 و (ك-1)(م-1)=1936 فأوجد كلاً من ك و م. [8 درجات]

إجابات مختصرة للمسابقة الوطنية الرابعة:

1. (أ) بالتربيع ثم التبسيط ثم التربيع مرة أخرى نحصل على:
2س+1=16+16س^2-32س ومنها 16س^2-34س+15=0 وبالتالي:
(8س-5)(2س-3)=0 أي أن مجموعة الحل هي {2/3، 8/5}. بالتعويض في المعادلة نجد أنّ س=2/3 تحقق المعادلة و لكن س = 8/5 لا تحقق المعادلة.
وبالتالي فإنّ الحلّ الوحيد هو {2/3}.

(ب) بالتجريب نجد أنّ كلاً من س=-2 و س=3 جذر للمعادلة وبقسمة د(س) على (س+2)(س-3)=س^2-س-6 نجد أنّ
د(س)=(س+2)(س-3)(س^2-2س+10)
و باستخدام القانون العم لحلّ المعادلة س^2-2س+10 = صفر نجد أنّ:
س=1 + 3 ت و س=1 – 3 ت
وبالتالي فإنّ س =-2, س=3، س=1+3ت و س=1-3ت هي جميع جذور المعادلة.

(ج) (س*ص)^2 = س^2 * ص^2
= (س*س)*(ص*ص)
= س*(س*ص)*ص
و لدينا أيضاً:
(س*ص)^2 = (س*ص)*(س*ص)
= س*(ص*س)*ص
وبالتالي فإن س*ص = ص*س.

2. (أ) الخطوة الأساسية: صائبة لأنّ:
الطرف الأيمن = (1-س)(1+س)
الطرف الأيسر = 1-س^2
خطوة الاستقراء: لنفرض أن
(1- س)(1+ س)(1+ س^2)(1+ س^4)...(1+ س$^{2^{ك}}$) = 1- س$^{2^{ك+2}}$
ونريد اثبات أن :
(1- س)(1+ س)(1+ س^2)(1+ س^4)...(1+ س$^{2^{ك+1}}$) = 1- س$^{2^{ك+2}}$

الطرف الأيسر= (1- س)(1+ س)(1+ س^2)(1+ س^4)...(1+ س$^{2^{ك+1}}$) (

= (1-س$^{2^{ك+1}}$)(1+س$^{2^{ك+1}}$) (من فرضية الاستقراء)

ك+2

= 1-س^2 = الطرف الأيمن، وهو المطلوب.

(ب) لنفرض أن $\text{س}_\text{ك}$ هو عدد المباريات التي يلعبها الفريق حتى اليوم رقم ك من شهر شوال. وبالتالي: س_1، س_2,...س_{30} متتالية متزايدة من الأعداد الصحيحة الموجبة المختلفة حيث $\text{س}_\text{ك}$ بين 1 و 45.

كما أنّ: س_1+14، س_2+14,....، س_{30}+14 متتالية متزايدة من الأعداد الصحيحة الموجبة المختلفة حيث $\text{س}_\text{ك}$ بين 15 و 59. ولذا لدينا 60 عددا صحيحا موجبا: س_1, س_2,..., س_{30}, س_1+14، س_2+14,....، س_{30}+14 كل منها أصغر من أو يساوي 59. وعليه فإنّه يوجد على الأقلّ عددان منهما متساويان.

و بما أنّ س_1, س_2,...، س_{30} مختلفون و س_1+14, س_2+14,...س_{30}+14 مختلفون فإنّه يوجد ل و م حيث $\text{س}_\text{ل}$ = $\text{س}_\text{م}$ +14 و التالي فإنّ الفريق يجب أن يلعب 14 مباراة من اليوم رقم (م+1) إلى اليوم ل.

3. (أ) ضع ص=س$^{6/1}$. لاحظ أنّ ص تؤول إلى 1 عندما تؤول س إلى 1.

$$\text{نهـــا}_{\text{س}\to 1}\ \frac{\sqrt[3]{\text{س}}-1}{\sqrt{\text{س}}-1} = \text{نهـــا}_{\text{ص}\to 1}\ \frac{\text{ص}^2-1}{\text{ص}^3-1} =$$

$$\text{نهـــا}_{\text{ص}\to 1}\ \frac{\text{ص}+1}{\text{ص}^2+\text{ص}+1} = 3/2$$

(ب) حلّ المعادلة لو(س-1) = لو(س-2)- لو(س+2)

يجب أن نجد مجموعة التعريف للمعادلة أولاً. هنا يجب أن يكون س أكبر من 2.

لو(س-1) = لو(س-2)- لو(س+2)

= لو((س-2)/(س+2)) وهذا يقتضي :

س-1=(س-2)/(س+2) أو (س -1)(س+2)=(س-2)

أي أن س^2=0 وبالتالي فإن س=0. و بما أنّ الصفر لا ينتمي لمجموعة التعريف فالمعادلة ليس لها حلول.

(ج) إذا كان ك عدداً أوّلياً فهل من الضروري أن يكون 2$^\text{ك}$ -1 عدداً أوّلياً؟

لا: خذ ك=11 فيكون 2^{11}-1=2047=(23) (89). (أجوبة أخرى ممكنة).

4. (أ) 2^{1994}+2^{1994}+2^{1995} = 2$^{(4\text{س})}$

2^{1994}+2^{1994}+2×2^{1994}= 2$^{(4\text{س})}$

4×2^{1994}= 2$^{(4\text{س})}$

2^{1996}= 2$^{(4\text{س})}$

إذن 1996 = 4س أي أن س= 499.

(ب) بما أنّ مجموعة تعريف د(س) هي مجموعة الأعداد الحقيقية, فلدينا س و – س ينتميان لمجموعة التعريف.

د(- س) = لو(- س + $\sqrt{س^2+1}$) و يكفي الضرب بالمرافق داخل اللوغاريتم و استعمال خاصية : لو(1/س) = - لو(س).

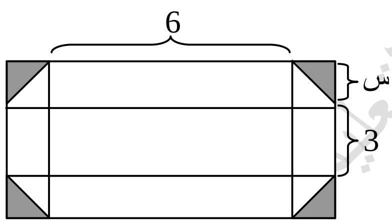
(ج) حساب محددة المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 6س & 4 \\ 9 & 2س \end{bmatrix}$$

و حل المعادلة: المحددة = صفراً , فنجد أن:

$12س^2-36=0$ مما يكافئ س= $\sqrt{3}$ و س=- $\sqrt{3}$

5. (أ)



المساحة غير المظللة هي:

4(0.5 س^2)+(3×6+3س+3س+2(6س)=2س^2 +18س+18 و لذا فإنّ :

س^2+18س+18 = 62 أي : س^2+9س +9-31=0

أي يجب حلّ المعادلة من الدرجة الثانية الآتية: س^2+9س-22 =0 والتي لديها الجذران 2 و -11 . هذا الأخير سالب فلا يليق أن يكون حلاً.

وبالتالي فإن المساحة المظللة = 2 س^2 = 8 سم^2.

(ب) ك م = 2047 و (ك-1)(م-1) =1936

ومن هذه العبارة الأخيرة نستنتج : ك+م = 2047 -1936+1 =112 .

و يصبح لدينا النظام التالي: ك م = 2047 و ك+م =112 و هذا يكافئ المعادلة : س^2 - 112 س + 2047 =0 وبالتالي يكون الحلان س$_1$=ك و س$_2$=م.

ومن ثم: ك=23 و م=89 و هما أوّليان.